



TITLE:

Berry's Phase, Schwinger Term and Explicit Calculations in Two Dimensions

AUTHOR(S):

細野, 忍

CITATION:

細野, 忍. Berry's Phase, Schwinger Term and Explicit Calculations in Two Dimensions. 物性研究 1987, 48(3): 193-196

ISSUE DATE:

1987-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/92551>

RIGHT:

2 アノマリー

$$L(x) = \phi^\dagger(x) D\phi(x)$$

なるラグランジアン密度で与えられる量子化された Dirac 場 $\phi(x)$ の理論を考える。 $G(x)$ を行列関数とし

$$J[x; G] = \phi^\dagger(x) \{G(x), D\} \phi(x),$$

$$J_\mu[x; G] = \phi^\dagger(x) i \Gamma_\mu G(x) \phi(x)$$

として、藤川の方法によって計算すれば

$$\langle \partial_\mu J_\mu[x; G] \rangle_0 = \langle J[x; G] \rangle_0 + A[x; G]$$

となる。右辺の $A[x; G]$ がアノマリー項であり、

$$A[x; G] = \frac{2}{(2\pi)^n} \lim_{\beta \rightarrow 0} \int d^n q \operatorname{tr} \{ G(x) \exp[-\beta(D - \not{q})^2] \}$$

で与えられる。結果は正則化因子 $k(\beta D^2)$ のとり方によらない。 G を Γ_{n+1} や $i[\Gamma_{n+1} A, D]$ のようにとればノン・トリビアルな $A[x; G]$ が得られ、

$$\int d^n x A[x; \Gamma_{n+1}] = 2V(0),$$

$$\int d^n x A[x; i[\Gamma_{n+1} A, D]] = 2U(0)$$

等となる。紙幅の関係で具体的なモデルについての計算は省略する。詳細については

- 1) M. Hirayama, Topological invariants for Dirac operators on open spaces, Phys. Rev. D33 (1986) 1079.
- 2) M. Hirayama and N. Sugimasa, Novel topological invariants and anomalies, Phys. Rev. D vol. 35, No. 2 (1987).

を参照されたい。

Berry's Phase, Schwinger Term and Explicit Calculations in Two Dimensions

名大・理 細 野 忍

§ 1. 序

外部変数を持つ量子力学系の断熱過程には、一般に、変数空間のトポロジーに起因する Berry の位相¹⁾

が現れる。そこで第一に、この位相が、断熱定理の証明のどこに現れるのかを明らかにする。

一方、Chiral anomaly を Hamilton 形式で解釈することが、Berry の位相を用いてなされている²⁾。そこで第二に、この議論を正準量子化の立場から定式化し、Berry の位相と、ゲージ対称性³⁾の ray 表現との関係を明らかにする。

§ 2 断熱定理と Berry の位相

ここでは、Messiah³⁾の証明の中に自然に Berry の位相が現れていることを指摘する。
=断熱定理³⁾=

Schrodinger 方程式

$$\begin{cases} i \frac{d}{dS} U_T(S) = T H(S) U_T(S) \\ U_T(S=0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

が決める evolution operator は

$$U_T(S) \xrightarrow{(T \rightarrow \infty)} A(S) \phi_T(S) \quad (2)$$

を満たす。ここで、 $A(S)$ は

$$\frac{d}{dS} A(S) = -K(S) A(S), \quad K(S) = -\sum_j P_j(S) \frac{d}{dS} P_j(S) \quad (3)$$

が定めるユニタリー operator 。

Hamiltonian が $H(S) = H(x_1(S), x_2(S), \dots, x_n(S))$ である場合には、operator A は

$$A(x(S)) = P \exp \left(-\int_0^S K(x(\tau)) d\tau \right) \quad (4)$$

と書かれる。この表式で、Path ordering が出てくることからわかるように、一般に A は Path 依存性を持つ。これが Berry の位相であることが示される：実際、計算により、

$$\begin{aligned} (\text{曲率}) &= dK + K^2 \\ &= \sum_j |u_j\rangle \langle u_j| \overleftarrow{d} (1 - P_j) d|u_j\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $u_j = u_j(x)$ s. t. $H(x) u_j(x) = E_j(x) u_j(x)$ である。この式は、U(1)-Berry 位相の式¹⁾に他ならない。また、 E_j が縮退しているときは

$$P_j \equiv \sum_a |u_j^a\rangle \langle u_j^a| \quad (6)$$

のように考えればよく、このとき(5)式は

$$(\text{曲率}) = \sum_{a,b} |u_j^a\rangle \langle u_j^b| (dU + U^2)^{ab} \langle u_j^b|$$

となる。但しここで、 $U^{ab} \equiv (u_j^a | d | u_j^b)$ と定義した。この表式は、Wilczek, Zee⁴⁾によって見出された non-abelian Berry 位相である。

このように、Berry の位相は、断熱定理の証明の中に、operator A の持つ Holonomy として自然に含まれているのである。従って operator A を幾何学的に考察することによって、Berry 位相のそうした性質を知ることができる。

なお Φ_T は、Dynamical な位相因子であり重要ではない。(この節で用いた量の詳しい定義は、文献 3) を御覧下さい。)

§ 3. ゲージ対称性 $g^{(3)}$ の表現

あるゲージ配位 $A \in \mathcal{A}^{(3)}$ の所で、 $g^{(3)}$ の表現を構成することは、 $a_n |0\rangle_A = b_r |0\rangle_A = 0$ をみたす生成消滅演算子についてのゲージ変換を

$$\begin{pmatrix} a_n^g \\ b_r^{g\dagger} \end{pmatrix} = (\langle g \rangle_{ij}) \begin{pmatrix} a_n \\ b_r^\dagger \end{pmatrix} = U_g \begin{pmatrix} a_n \\ b_r^\dagger \end{pmatrix} U_g^\dagger \quad (7)$$

のように表す U_g を求めることである。これは実際に構成することが出来て、

$$U_g = P \exp(-\int_1^g Q_g^r), \quad Q_g^r \equiv : \alpha_i^{g\dagger} \langle dg^{-1} \cdot g \rangle_{ij} \alpha_j^g :$$

と書くことが出来る。ところが、 Q_g^r を正規積で正則化するために、

$$d Q_g^r + Q_g^{r2} = -\text{Tr } P_- \langle g^{-1} dg \rangle P_+ \langle g^{-1} dg \rangle \quad (8)$$

のように、 U_g は Path 依存性を持ち ray 表現となる。

U_g を $|0\rangle \equiv |0\rangle_A$ に作用すれば、(7) を Bogoliubov 変換と見て得られる真空 $|0\rangle_g$ に、up to phase で一致すべきであるから

$$U_g |0\rangle = e^{i\alpha(g)} |0\rangle_g \quad (9)$$

と書かれる。両辺を微分することによって

$$Q_g^r U_g |0\rangle = i d \alpha e^{i\alpha(g)} |0\rangle_g + e^{i\alpha(g)} d |0\rangle_g$$

となるが、 $\langle 0 | U_g^\dagger Q_g^r U_g | 0 \rangle = 0$ であるから

$$i d \alpha = {}_g \langle 0 | d | 0 \rangle_g$$

となる。これより Berry の位相との関係が、

$$d \{ {}_g \langle 0 | d | 0 \rangle_g \} = \text{Tr } P_- \langle g^{-1} dg \rangle P_+ \langle g^{-1} dg \rangle$$

であることがわかる。以上、詳しくは論文 5) を御覧下さい。

§ 4. 結論および課題

正準量子化の手続きによって Berry の位相と $g^{(3)}$ の ray 表現の関係が明らかにされた。
さらに定量的な議論が期待される。⁵⁾

参考文献

- 1) M. V. Berry; Proc. R. Soc. Lond. A392 (1984) 45.
B. Simon; Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 2167.
径路積分の立場からは
H. Kuratsuji and S. Iida; Prog. Theor. Phys. 74 (1985) 439; Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 1003.
- 2) P. Nelson and L. Alvarez-Gaumé; Comm. Math. Phys. 99 (1985) 103.
H. Sonoda; Phys. Lett. 156B (1985) 220; Nucl. Phys. B266 (1986) 410.
A. Niemi and G. Semenoff; Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 927; Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 1019.
- 3) A. Messiah; "Quantum Mechanics", (North-Holland, 1962).
- 4) F. Wilczek and A. Zee; Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 2111.
- 5) S. Hosono; DPNU-86-44.
S. Hosono and K. Seo; in preparation.

Fractional Charges on Monopoles : a manifestation of anomaly

都立大・理 南方久和

magnetic monopole に fractional charges, とくに electric charge が induce されるという現象についての基本的考え方を要約し, より最近の発展についてもふれたい。

非自明なトポロジーを持った background に Fermi 場が couple している状況では種々の興味深い現象が起ることが知られている。例えば fermion fractionization, monopole による陽子崩壊の触媒効果, cosmic string の超電導性などである。今日はこのうち第一の fermion fractionization (以下 FF と略称) に焦点をあて, Jackiw-Rebbi¹⁾以来よく確立されていると思われる fermion 数の他に electric charge の fractionization が chiral anomaly を通じて起ることを示す。

1. Fermion number fractionization

トポロジカルに非自明な background soliton 場中での Fermi 場は index 定理で指定されるいくつかの zero mode を持つことが知られている。この zero mode に伴う operator は Clifford 代数 $\{b_i,$